Свойства тригонометрических функций

1 Цель работы

1.1 Выработать навык перехода от градусной меры к радианной, и наоборот.

1.2 Выработать навык применения свойств тригонометрических функций к решению задач.

2 Разделы, темы рабочей программы, которые необходимо знать при выполнении и сдачи практической работы

Раздел 5 Тригонометрические функции числового аргумента

3 Краткие теоретические сведения

3.1 Радианная мера угла

Угол в 1 радиан – это центральный угол, опирающийся на дугу длиной 1, то есть на дугу, длина которой равна радиусу окружности.

Радианная и градусная меры связаны зависимостью 180˚ = n радиан

Угол в α ˚ = $\frac{\pi\propto}{180}$ радиан ˚

Например,

35˚ =$\frac{\pi}{180}$* 35 = $\frac{7\pi}{36}$рад; $\frac{180}{\pi}$* $\frac{2\pi}{3}$= 120°

Из формулы 1 рад = $\frac{180}{\pi}$получаем, что 1 рад = 57,3

3.2 Синус, косинус, тангенс и котангенс

Определение 1. Если точка М числовой окружности соответствует числу t , то абсциссу точки М называют косинусом числа t и обозначают cos t, а ординату точки М называют синусом числа t и обозначают sin t.

Определение 2. Отношение синуса числа t к косинусу того же числа называют тангенсом числа **t** и обозначают tg **t.**

Отношение косинуса числа t к синусу того же числа называют котангенсом числа t и обозначают ctg t: tg t = $\frac{\sin t}{\cos t}$; ctg t = $\frac{\cos t}{\sin t}$.

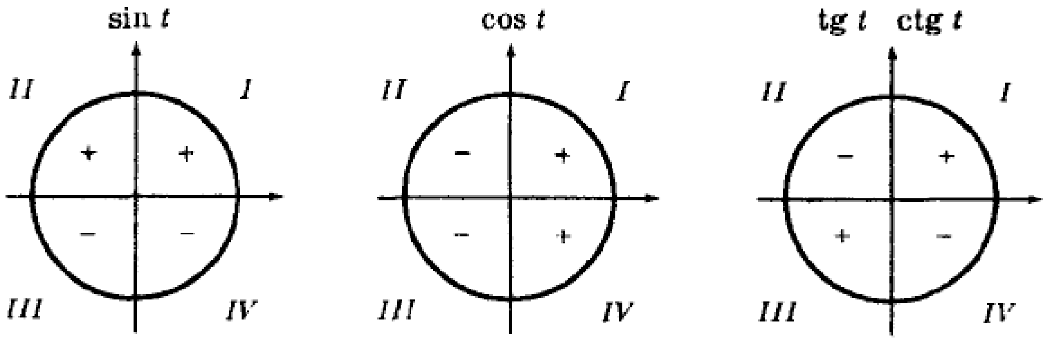
Для преобразования выражений используют свойства тригонометрических функций и формулы тригонометрии. Соотношение между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента:

$sin^2x + cos^2x = 1$ $\qquad$ $tg\ x \cdot ctg\ x = 1$

$tg\ x= \frac{sinx}{cosx}$ $\qquad$ $ctg\ x= \frac{cosx}{sinx}$

$1 + tg^2\ x=\frac{1}{cos^2x}$ $\qquad$ $1 + ctg^2\ x=\frac{1}{sin^2x}$

3.3 Знаки тригонометрических функции



3.4 Значение тригонометрических функций некоторых углов

Угол в градусах	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Угол в радианах	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не сущ.	0	не сущ.	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не сущ.	0	не сущ.

3.5 Четность, нечетность и периодичность тригонометрических функций

$$\sin(-x) = -\sin x,$$
$$\cos(-x) = \cos x,$$
$$\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\, x,$$
$$\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}\, x,$$
$$\sin(x + 2\pi k) = \sin x, \; k \in Z,$$
$$\cos(x + 2\pi k) = \cos x, \; k \in Z,$$
$$\mathrm{tg}(x + \pi k) = \mathrm{tg}\, x, \; k \in Z,$$
$$\mathrm{ctg}(x + \pi k) = \mathrm{ctg}\, x, \; k \in Z.$$

Косинус является четной функцией; синус, тангенс, котангенс - нечетные.

Период у функций косинус и синус равен $2\pi=360°$, у функций тангенс и котангенс период равен $\pi=180°$.

3.6 Формулы приведения

Это соотношения, с помощью которых значения тригонометрических функций аргументов $\frac{\pi}{2}\pm\alpha;\ \pi\pm\alpha;\ \frac{3\pi}{2}\pm\alpha;\ 2\pi\pm\alpha$ и др., выражаются через значения $\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ tg\alpha\ и\ ctg\alpha$.

Правила преобразования:

1) Если аргумент содержит $n\cdot\frac{\pi}{2}$, где n - нечетное натуральное число $\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2};\ \frac{7\pi}{2}\ и\ т.д.\right)$, то функция меняется на сходную, т.е. синус на косинус, тангенс на котангенс и наоборот. Если n - четное натуральное число $\left(\pi,\ 2\pi;\ 3\pi,\ 4\pi\ и\ т.д.\right)$, то название функции не изменяется.

2) Определяем знак ("+" или "-") значения первоначальной функции. Преобразованное выражение сохраняет знак первоначальной функции.

Пример 1

$cos(\frac{7\pi}{2}-\alpha)$

1) *Название функции изменяется;*

2) *Угол* $(\frac{7\pi}{2}-\alpha)$ *находится в 3 четверти, косинус отрицательный.*

$cos(\frac{7\pi}{2}-\alpha) = -\sin\alpha$

Пример 2

$\sin(2\pi+\alpha)$

1) *Название функции не изменяется;*

2) *Угол* $(2\pi+\alpha)$ *находится в 1 четверти, синус положительный.*

$\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha$

Пример 3

$tg(\frac{3\pi}{2}+2\alpha)$

1) *Название функции изменяется;*

2) *Угол* $(\frac{3\pi}{2}+2\alpha)$ *находится в 4 четверти, тангенс отрицательный.*

$tg(\frac{3\pi}{2}+2\alpha) = -ctg2\alpha$

Наименование функции	Значение аргумента						
	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
tg	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$
ctg	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$

4 Задания

4.1 Изучить настоящие методические указания к выполнению практической работы.
4.2 Выполнить индивидуальное задание.
4.3 Оформить отчет по практической работе.

5 Структура отчета

5.1 Номер и название практической работы;
5.2 Цель работы;
5.3 Задание;
5.4 Выполнение работы и оформление отчета по практической работе.

6 Пример выполнения задания

Задание 1. Исследовать функцию на четность, нечетность

$$f(x)=\frac{sinx-4x}{x^3-ctgx}$$

$$f(-x)=\frac{sin\,(-x)-4(-x)}{(-x)^3-ctg(-x)}=\frac{-sinx+4x}{-x^3+ctgx}=\frac{-(sinx-4x)}{-(x^3-ctgx)}=\frac{sinx-4x}{x^3-ctgx}=f(x)$$

$f(-x) = f(x)$ - функция четная.

Задание 2. а) Чему равна радианная мера

$$64^\circ=\frac{64^\circ\pi}{180^\circ}=\frac{16\pi}{45};$$

б) *Чему равна градусная мера*

4рад = $4\cdot 57{,}3^\circ \approx 229{,}2^\circ$; $\quad -\frac{7\pi}{3}=-\frac{7\cdot 180^\circ}{3}=-7\cdot 60^\circ=-420^\circ$

Задание 3. Определить знак

$$\frac{\cos 864^\circ tg250^\circ}{\sin(-150^\circ)ctg(-300^\circ)}$$

$\cos 864^\circ = \cos(360^\circ\cdot 2+144^\circ)=\cos 144^\circ$

$\cos 864^\circ<0$, так как 144° - угол второй четверти, косинус во второй четверти имеет знак минус.

tg 250°$<$ 0 , так как 250°- угол третьей четверти, тангенс в третьей четверти имеет знак минус.

cos 864° tg 250°$>$ 0, так как произведение двух отрицательных чисел есть число положительное.

Функция синус нечетная, тогда sin (-50°) = - sin50°; 50°- угол первой четверти, синус в первой четверти положителен, учитывая все это, получаем

sin (-50°) $<$ 0

Функция котангенс нечетная, тогда ctg (-300°) = - ctg 300°; 300° - угол четвертой четверти, котангенс в четвертой четверти отрицателен, учитывая все это, получаем

ctg (-300°)$>$ 0

sin (-50°) ctg (-300°)$<$ 0, так как произведение отрицательного и положительного числа есть число отрицательное.

Числитель- положительное число, знаменатель – отрицательное. Следовательно, дробь отрицательное число:

$$\frac{\cos 864° tg 250°}{\sin(-150°) ctg(-300°)} < 0$$

Задание 4. Вычислить

$$\frac{\sin(-60\ °) cos225°}{\sin 120° tg(-945°)}$$

sin(-60°)= - sin60°=- $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

cos 225 ˚= cos (270˚-45˚)=- sin 45˚=- $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

sin 120 ˚= sin (180˚ - 60˚)= sin 60˚= $\frac{1}{2}$;

$tg(-945°)$= - $tg945°$= - tg (180°·5+45°)= - tg 45°= -1

$$\frac{\sin(-60\ °) cos225°}{\sin 120° tg(-945°)} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-\frac{\sqrt{2}}{2})}{\frac{1}{2}\cdot(-1)} = - \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Задание 5. Найдите значение выражения

cos (-4050˚)· tg 3300˚=

= cos4050˚· tg 3300˚ =

= cos (360°·11+ 90°)·tg(180°·18+ 60°)=

= cos 90°·tg 60°= 0·$\sqrt{3}$= 0

Рекомендуемая литература

1. Валуцэ И.И . Математика для техникумов на базе средней школы: Учеб. Пособие – М.: Наука, 1989.- 2 изд., перераб. и доп.- 576с.
2. Богомолов Н.В. практические занятия по математике: Учеб. Пособие для средних спец. учеб. Заведений – М.: Высш. шк., 2003. - 495с.
3. Пехлецкий И.Д. Математика: Учеб. для студ. образоват. учреждений сред. проф. образования / Игорь Дмитриевич Пехлецкий . - 2-е изд., стереотип. - М.: Издательский центр Академия, 2003. - 304с.
4. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. – Изд. 27-е, испр.- М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1986.- 320с.
5. Настоящая методическая разработка
6. Конспект лекций

Приложение 1

Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1

1. Исследовать функцию на четность

$$f(x)=\frac{2x^2-ctgx}{4-cosx}$$

2. а) Чему равна градусная мера угла $\propto=-3$ рад

   б) Чему равна радианная мера угла $\propto= 330^\circ$

3. Найдите знак выражения

$$\frac{cos(-300^\circ)\cdot tg(-770^\circ)}{sin(-1020^\circ)\,ctg370^\circ}$$

4. Вычислите

$$\frac{sin45^\circ\cdot tg30^\circ cos60^\circ}{cos45^\circ ctg(-60^\circ)}$$

5. Найдите значение выражения

   $tg210^\circ\cdot cos(-390^\circ)$

Вариант 2

1. Исследовать функцию на четность

$$f(x)=\frac{cosx-x^3}{4x+ctgx}$$

2. а) Чему равна градусная мера угла $\propto=\frac{13\pi}{30}$ рад

   б) Чему равна радианная мера угла $\propto=374^\circ$

3. Найдите знак выражения

$$\frac{sin(-940^\circ)\cdot tg(-530^\circ)}{cos(-1010^\circ)\,ctg25^\circ}$$

4. Вычислите

$$\frac{sin\,(-90^\circ)\cdot ctg(-60^\circ)cos30^\circ}{sin45^\circ tg(-30^\circ)}$$

5. Найдите значение выражения

   $tg600^\circ\cdot cos(-765^\circ)$

Вариант 3

1. Исследовать функцию на четность

   $f(x)=\frac{3x-tgx}{sinx+4x^3}$

2. а) Чему равна градусная мера угла $\propto=\frac{5\pi}{36}$ рад;

   б) Чему равна радианная мера угла $\propto=225°$

3. Найдите знак выражения:

   $$\frac{sin(-1200°)\cdot ctg(-420°)}{cos(-250°)\,tg50°}$$

4. Вычислите:

   $$\frac{\sin(-90°)\cdot tg(-30°)\cos(-60°)}{sin60°ctg45°}$$

5. Найдите значение выражения

   $ctg(-225°)\cdot sin1470°$

Вариант 4

1. Исследовать функцию на четность

   $f(x)=\frac{x^3-sinx}{x^4+3cosx}$

2. а) Чему равна градусная мера угла $\propto=-1{,}5$ рад;

   б) Чему равна радианная мера угла $\propto=75°$

3. Найдите знак выражения:

   $$\frac{sin(-75°)\cdot cos(-500°)}{\mathrm{ctg}(-190°)\,tg400°}$$

4. Вычислите:

   $$\frac{\sin 270°\cdot\cos(-30°)}{sin60°tg45°ctg(-45°)}$$

5. Найдите значение выражения

   $ctg(-945°)\cdot sin1110°$